# ВЕСЦІ
## АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ

ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 2

АСОБНЫ АДБІТАК

Мінск 1993

Преобразуем третье слагаемое уравнения (29), умноженное на $A^{-1}$. Имея в виду, что

$$\Pi_{m+2}(\nu) = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_{\nu-1}, & i_\nu, & i_{\nu+1}, & \dots, & i_m, & i_{m+1}, & i_{m+2} \\ i_1, & i_2, & \dots, & i_{\nu-1}, & i_{\nu+1}, & i_{\nu+2}, & \dots, & i_{m+1}, & i_\nu, & i_{m+2} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\sum_{\nu=1}^{m} {}^{0,2}\left({}^{0,0}(HA)^{\Pi_{m+2}(\nu)}A^{-1}\right) =$$

$$= \left\|\sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i_{m+1}} \sum_{i_{m+2}} H_{i_1 i_2 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{m+1}} A_{i_{m+2} i_\nu} A^{-1}_{i_{m+1} i_{m+2}}\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i_{m+1}} H_{i_1 i_2 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{m+1}} e_{\nu i_{m+1}}\right\| = \left\|\sum_{\nu=1}^{m} H_{i_1 i_2 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_\nu}\right\| = mH,$$

т. е. получаем третье слагаемое уравнения (26). Последнее равенство в этой цепочке преобразований записано в силу симметрии матрицы $H$. Доказательство теоремы закончено.


## Summary

The notion of multidimensional matrix differential equations is given. Formulas of Ehler for datum numerical equations of the first order and the solution of linea equations of the first order with constant factors are obtained. Equations for multidimensional polynom Hermite are also obtained.


## Литература


1. Муха В. С. // Автоматика и вычислительная техника. 1991. Вып. 20. С. 128—133.
2. Муха В. С. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 4. С. 42—47.
3. Муха В. С. // Автоматика и вычислительная техника. 1987. Вып. 16. С. 65—71.
4. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.
5. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.



*Минский радиотехнический институт*



*Поступила в редакцию 20.11.91*

*УДК 519.63:539.12.04*



*С. Н. СЫТОВА*


# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В [1] приводятся результаты численного моделирования развития нелинейной стадии абсолютной черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка (РЭП) в монокристалле в рентгеновском диапазоне длин волн. Если линейная стадия развития черенковской неустойчивости РЭП в монокристалле в настоящее время теоретически исследована достаточно полно [2, 3], то нелинейная стадия до сих пор не исследовалась. Полученные данные могут быть использованы при планировании экспериментов по обнаружению черенковской неустойчивости РЭП в кристалле.

В настоящей работе предлагается разностный метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, моделирующей указанный выше процесс с использованием варианта метода переменных направлений [4]. Дан алгоритм численного решения системы уравнений. Рассматриваются устойчивость и сходимость решения разностной задачи к решению исходной.

**1. Постановка задачи.** Если РЭП описывать в гидродинамическом приближении, не рассматривая многократное рассеяние его частиц в кристалле, то из уравнений Максвелла, непрерывности и движения для релятивистских частиц в случае двухволновой дифракции по Брэггу получится система дифференциальных уравнений первого порядка относительно комплекснозначных переменных $E(x, t)$, $E_\tau(x, t)$, $\mathbf{v}(x, t)$, $n(x, t)$, описывающая взаимодействие электромагнитного поля в кристалле толщиной $L$ с РЭП:

$$\partial E/\partial t + A_{11}\partial E/\partial x + A_{12}\partial E_\tau/\partial x + Q_{11}E + Q_{12}E_\tau = f_1(n,\ \mathbf{v},\ \partial n/\partial t,\ \partial \mathbf{v}/\partial t), \tag{1.1}$$

$$\partial E_\tau/\partial t + A_{21}\partial E/\partial x + A_{22}\partial E_\tau/\partial x + Q_{21}E + Q_{22}E_\tau = f_2(n,\ \mathbf{v},\ \partial n/\partial t,\ \partial \mathbf{v}/\partial t), \tag{1.2}$$

$$\partial n/\partial t + U\partial n/\partial x + Sn = f_3(\mathbf{v},\ \partial \mathbf{v}/\partial x), \tag{1.3}$$

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + U\partial \mathbf{v}/\partial x + S\mathbf{v} = \mathfrak{f}_4(E,\ \mathbf{v},\ \partial E/\partial x,\ \partial E/\partial t). \tag{1.4}$$

Начальные и граничные условия задаются в области $G = \{(x, t),\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$\begin{gathered} E(x,\ 0) = 1, \quad E_\tau(x,\ 0) = -Q_{11}/Q_{12}, \\ \mathbf{v}(x,\ 0) = 0, \quad n(x,\ 0) = 0, \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant L; \\ E(0,\ t) = 1, \quad E_\tau(L,\ t) = -Q_{11}/Q_{12}, \\ \mathbf{v}(0,\ t) = 0, \quad n(0,\ t) = 0, \quad \text{при } 0 < t \leqslant T. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Переменные $E(x, t)$ и $E_\tau(x, t)$ соответственно описывают амплитуду проходящей и дифрагированной электромагнитных волн в кристалле, $\mathbf{v}(x, t)$ — амплитуду возмущения скорости РЭП в гидродинамической модели, $n(x, t)$ — амплитуду возмущения плотности РЭП.

Свойства коэффициентов системы (1.1) — (1.5) следующие: $A_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, $U$ являются чисто действительными; $Q_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, $S$ — чисто мнимые; $|A_{11}| \gg |A_{12}|$, $|A_{22}| \gg |A_{21}|$; $A_{11} > 0$; $A_{22} < 0$, $U > 0$; $\det(Q_{ij}) = 0$, $Q_{12} \approx Q_{21}$. Полный вид коэффициентов системы (1.1) — (1.5) дается в [1].

Легко показать, что начальные и граничные условия (1.5) корректны и обеспечивают существование единственного решения из класса $C_1$.

Система (1.1) — (1.5) является системой квазилинейных уравнений гиперболического типа. Существенную трудность при ее решении представляют следующие факты: все переменные и коэффициенты комплексные; наличие определенной жесткости в уравнениях (1.1) — (1.2) из-за огромного спектрального разброса матрицы $Q$; сложный нелинейный вид функции $\mathfrak{f}_4$. Поставленная задача решалась с помощью варианта метода переменных направлений, предложенного в [4]. Основные преимущества разностных схем этого метода — экономичность, абсолютная устойчивость без стабилизирующих поправок для задач любой размерности, отсутствие требования коммутативности пространственных операторов для выполнения условий устойчивости. Кроме этого, данный метод оказался эффективным при работе с комплексной арифметикой.

**2. Разностная схема.** В работе использованы обозначения [5].

Область непрерывного изменения переменных $G$ заменяется сеточной областью $G_{xt} = \{(x_k,\ t_j),\ x_k = (k-1)h_x,\ k = 1, 2, \ldots, N_1,\quad N_1 = [L/h_x],$ $t_j = (j-1)h_t,\ j = 1, 2, \ldots, N_2,\ N_2 = [T/h_t]\}$.

На сетке $G_{xt}$ система (1.1)—(1.4) аппроксимируется следующей системой разностных уравнений:

$$\mathbf{v}_t^1 + U\hat{\mathbf{v}}_{\bar{x}}^1 + S\mathbf{v}^2 = \mathbf{F}_4((E^1 + E^2)/2,\ (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{v}_t^2 + U\hat{\mathbf{v}}_{\bar{x}}^1 + S\hat{\mathbf{v}}^2 = \mathbf{F}_4((E^1 + E^2)/2,\ (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2), \tag{2.2}$$

$$n_t^1 + U\hat{n}_{\bar{x}}^1 + Sn^2 = \hat{F}_3((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2), \tag{2.3}$$

$$n_t^2 + U\hat{n}_{\bar{x}}^1 + S\hat{n}^2 = \hat{F}_3((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2), \tag{2.4}$$

$$E_t^1 + A_{11}\hat{E}_{\bar{x}}^1 + A_{12}E_{\tau\bar{x}}^1 + Q_{11}E^2 + Q_{12}E_\tau^2 = \hat{F}_1((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2,\ (n^1 + n^2)/2), \tag{2.5}$$

$$E_{\tau t}^1 + A_{21}\hat{E}_x + A_{22}\hat{E}_{\tau x}^1 + Q_{21}E^2 + Q_{22}E_\tau^2 = \hat{F}_2((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2,\ (n^1 + n^2)/2), \tag{2.6}$$

$$E_t^2 + A_{11}\hat{E}_{\bar{x}}^1 + A_{12}\hat{E}_{\tau\bar{x}}^1 + Q_{11}\hat{E}^2 + Q_{12}\hat{E}_\tau^2 = \hat{F}_1((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2,\ (n^1 + n^2)/2), \tag{2.7}$$

$$E_{\tau t}^2 + A_{21}\hat{E}_x^1 + A_{22}\hat{E}_{\tau x}^1 + Q_{21}\hat{E}^2 + Q_{22}\hat{E}_\tau^2 = \hat{F}_2((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2)/2,\ (n^1 + n^2)/2), \tag{2.8}$$

где $E^1$, $E^2$, $E_\tau^1$, $E_\tau^2$, $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $n^1$, $n^2$ — пары приближенных значений $E$, $E_\tau$, $\mathbf{v}$, $n$ соответственно.

Начальные и граничные условия для разностной задачи (2.1)—(2.8) на $G_{xt}$ аппроксимируются точно:

$$\begin{gathered} E^{1,2}(x,\ 0) = 1, \quad E_\tau^{1,2}(x,\ 0) = -Q_{11}/Q_{12}, \\ \mathbf{v}^{1,2}(x,\ 0) = 0, \quad n^{1,2}(x,\ 0) = 0, \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant L; \\ E^{1,2}(0,\ t) = 1, \quad E_\tau^{1,2}(L,\ t) = -Q_{11}/Q_{12}, \\ \mathbf{v}^{1,2}(0,\ t) = 0, \quad n^{1,2}(0,\ t) = 0, \quad \text{при } 0 < t \leqslant T. \end{gathered} \tag{2.9}$$

В качестве решения в каждой точке области $G_{xt}$ берется полусумма приближенных значений искомых переменных.

Поскольку $|A_{11}| \gg |A_{12}|$, $|A_{22}| \gg |A_{21}|$, то при применении варианта метода переменных направлений удалось получить разностные уравнения системы (2.5)—(2.8) без итераций. На первом этапе за два прохода разностного слоя по $x$ (туда и обратно) определяются значения $E^1$ и $E_\tau^1$. За третий проход слоя по $x$ по этим уже вычисленным значениям получаются значения $E^2$, $E_\tau^2$. Очевидно, что приведенная схема является экономичной.

Исследуем устойчивость разностной схемы (2.1)—(2.9) и сходимость решения этой задачи к решению исходной. Для простоты рассмотрим линеаризованный вариант.

**3. Доказательство устойчивости разностной схемы (2.1)—(2.9).** Перепишем (2.5)—(2.8) в матричном виде:

$$E_t^1 + \tilde{\Lambda}(\hat{E}^1) + QE^2 = \hat{F}, \tag{3.1}$$

$$E_t^2 + \Lambda(\hat{E}^1) + Q\hat{E}^2 = \hat{F}, \tag{3.2}$$

где

$$E^1 = \begin{pmatrix} E^1 \\ E_\tau^1 \end{pmatrix}, \quad E^2 = \begin{pmatrix} E^2 \\ E_\tau^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}(E) = \begin{pmatrix} A_{11}\hat{E}_{\bar{x}} + A_{12}E_{\tau\bar{x}} \\ A_{21}\hat{E}_x + A_{22}\hat{E}_{\tau x} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(E) = \begin{pmatrix} A_{11}\hat{E}_{\bar{x}} + A_{12}\hat{E}_{\tau\bar{x}} \\ A_{21}\hat{E}_x + A_{22}\hat{E}_{\tau x} \end{pmatrix}, \quad Q = (Q_{ij}), \quad i,\ j = 1,\ 2, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix}.$$

Ниже использованы обозначения: $u' = \mathrm{Re}(u)$, $u'' = \mathrm{Im}(u)$.

Теорема 1. *Разностная схема (2.1)—(2.9) безусловно устойчива по начальным данным и правой части. Для ее решения имеют место оценки:*

$$\|(\hat{\mathbf{v}}^i)'\|^2 + \|(\hat{\mathbf{v}}^i)''\|^2 \leqslant D_1 \{\|(\mathbf{v}^i(0))'\|^2 + \|(\mathbf{v}^i(0))''\|^2 +$$
$$+ \|(U\mathbf{v}^1_{\bar{x}}(0) + S\mathbf{v}^2(0) - \mathbf{F}_4(0))'\|^2 + \|(U\mathbf{v}^1_{\bar{x}}(0) + S\mathbf{v}^2(0) - \mathbf{F}_4(0))''\|^2 +$$
$$+ \max_t (\|\mathbf{F}_4'\|^2 + \|\mathbf{F}_4''\|^2 + \|\mathbf{F}_{4t}'\|^2 + \|\mathbf{F}_{4t}''\|^2)\}, \quad i = 1,\ 2; \tag{3.3}$$

$$\|(\hat{n}^i)'\|^2 + \|(\hat{n}^i)''\|^2 \leqslant D_2 \{\|(n^i(0))'\|^2 + \|(n^i(0))''\|^2 +$$
$$+ \|(Un^1_{\bar{x}}(0) + Sn^2(0) - F_3(0))'\|^2 + \|(Un^1_{\bar{x}}(0) + Sn^2(0) - F_3(0))''\|^2 +$$
$$+ \max_t (\|F_3'\|^2 + \|F_3''\|^2 + \|F_{3t}'\|^2 + \|F_{3t}''\|^2)\}, \quad i = 1,\ 2; \tag{3.4}$$

$$\|(\hat{E}^i)'\|^2 + \|(\hat{E}^i)''\|^2 \leqslant D_3 \{\|(E^i(0))'\|^2 + \|(E^i(0))''\|^2 +$$
$$+ \|(\Lambda(E^1(0)) + QE^2(0) - F(0))'\|^2 + \|(\Lambda(E^1(0)) + QE^2(0) - F(0))''\|^2 +$$
$$+ \max_t (\|F'\|^2 + \|F''\|^2 + \|F_t'\|^2 + \|F_t''\|^2)\}, \quad i = 1,\ 2, \tag{3.5}$$

где $D_j$, $j=1, 2, 3$,— ограниченные положительные константы, не зависящие от $h_t$, $h_x$.

Доказательство начнем с рассмотрения уравнений (2.3)—(2.4). Умножим (2.3) скалярно на $h_t(Un^1_{\bar{x}})_t$, (2.4) — на $h_t(Sn^2)_t$, просуммируем их и проведем некоторые преобразования:

$$\Phi(n) + 0{,}5\,\|(U\hat{n}^1_{\bar{x}} + S\hat{n}^2 - \hat{F}_3)'\|^2 + 0{,}5\,\|(U\hat{n}^1_{\bar{x}} + S\hat{n}^2 - \hat{F}_3)''\|^2 +$$
$$+ 0{,}5h_t^2 (\|(Un^1_{\bar{x}})_t'\|^2 + \|(Un^1_{\bar{x}})_t''\|^2 + \|(Sn^2)_t'\|^2 + \|(Sn^2)_t''\|^2) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + C_1h_t)\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)'\|^2 + (1 + C_2h_t)\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)''\|^2 +$$
$$+ C_3(\|(\hat{F}_3 + F_3)'\|^2 + h_t\,\|F_{3t}'\|^2) + C_4(\|(\hat{F}_3 + F_3)''\|^2 + h_t\,\|F_{3t}''\|^2), \tag{3.6}$$

где $C_i$, $i = 1, \ldots, 4$, — ограниченные константы, не зависящие от $h_t$, $h_x$, $\Phi(n) = h_t(((n^1_t)', (Un^1_{\bar{x}})_t') + ((n^1_t)'', (Un^1_{\bar{x}})_t'') + ((n^2_t)', (Sn^2)_t') + ((n^2_t)'', (Sn^2)_t''))$.

Используя разностную формулу суммирования по частям и граничные значения функций, получаем $\Phi(n) > 0$. Из (3.6 )непосредственно следует оценка (3.4) для $i = 2$, если учесть, что $n^2_t = -U\hat{n}^1_{\bar{x}} - S\hat{n}^2 + \hat{F}_3$, и продолжить (3.6) рекуррентно вправо.

Умножим (2.3) скалярно на $\hat{n}^1$. Приходим к неравенству:

$$\|(\hat{n}^1)'\|^2 + \|(\hat{n}^1)''\|^2 \leqslant (1 + M_1h_t)\,\|(n^1)'\|^2 + (1 + M_2h_t)\,\|(n^1)''\|^2 +$$
$$+ M_3h_t\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)'\|^2 + M_4h_t\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)''\|^2, \tag{3.7}$$

где $M_i$, $i = 1, \ldots, 4$, — ограниченные константы, не зависящие от $h_t$, $h_x$. Из (3.6) следует:

$$0{,}5\,\|(U\hat{n}^1_{\bar{x}} + Sn^2 - \hat{F}_3)'\|^2 + 0{,}5\,\|(U\hat{n}^1_{\bar{x}} + Sn^2 - \hat{F}_3)''\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + C_1h_t)\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)'\|^2 + (1 + C_2h_t)\,\|(Un^1_{\bar{x}} + Sn^2 - F_3)''\|^2 +$$
$$+ C_3(\|(\hat{F}_3 + F_3)'\|^2 + h_t\,\|F_{3t}'\|^2) + C_4(\|(\hat{F}_3 + F_3)''\|^2 + h_t\,\|F_{3t}''\|^2). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получается оценка (3.4) для $i=1$.

Ход рассуждений для оценок (3.3) абсолютно аналогичен приведенному выше. Сделаем только одно замечание:

$$\|(U\hat{\mathbf{v}}_{\bar{x}}^{1}+S\hat{\mathbf{v}}^{2}-\mathbf{F}_{4})'\|^{2}\leqslant(1+h_{t})\|(U\hat{\mathbf{v}}_{\bar{x}}^{1}+S\hat{\mathbf{v}}^{2}-\hat{\mathbf{F}}_{4})'\|^{2}+h_{t}(1+h_{t})\|\mathbf{F}_{4t}'\|^{2}.$$

То же справедливо и для мнимой части соответствующих выражений.

Докажем устойчивость решения разностной задачи (3.1)—(3.2). Умножим (3.1) скалярно на $h_t(\Lambda(E^1)_t)$, (3.2) — на $h_t((QE^2)_t)$, просуммируем их. После некоторых преобразований равенство примет вид

$$\Phi(E)+0{,}5\|(\Lambda(\hat{E}^1)+Q\hat{E}^2-\hat{F})'\|^2+0{,}5(\|\Lambda(\hat{E}^1)+Q\hat{E}^2-\hat{F})''\|^2+$$
$$+0{,}5h_t^2(\|(\Lambda(E^1))_t'\|^2+\|(\Lambda(E^1))_t''\|^2+\|(QE^2)_t'\|^2+\|(QE^2)_t''\|^2)-$$
$$-h_t^2(((A_{12}E^1_{\tau\bar{x}})',\ (\Lambda_1(E^1))_t')+((A_{12}E^1_{\tau\bar{x}})'',\ (\Lambda_1(E^1))_t''))=$$
$$=0{,}5\|(\Lambda(E^1)+QE^2-F)'\|^2+0{,}5\|(\Lambda(E^1)+QE^2-F)''\|^2+$$
$$+0{,}5(\|\hat{F}'\|^2-\|F'\|^2+\|\hat{F}''\|^2-\|F''\|^2)-$$
$$-h_t((F_t',\ (\Lambda(E^1)+QE^2)')+(F_t'',\ (\Lambda(E^1)+QE^2)'')),$$

где

$$(\Lambda_1(E^1))_t=A_{11}E^1_{xt}+A_{12}E^1_{\tau\bar{x}t},$$
$$\Phi(E)=h_t(((E_t^1)',\ (\Lambda(E^1))_t')+((E_t^1)'',\ (\Lambda(E^1))_t'')+$$
$$+((E_t^2)',\ (QE^2)_t')+((E_t^2)'',\ (QE^2)_t'')).$$

Поскольку $A_{12}\ll A_{11}$, то имеет место следующее неравенство:

$$\Phi(E)+0{,}5\|(\Lambda(\hat{E}^1)+Q\hat{E}^2-\hat{F})'\|^2+0{,}5\|(\Lambda(\hat{E}^1)+Q\hat{E}^2-\hat{F})''\|^2\leqslant$$
$$\leqslant(1+L_1h_t)\|(\Lambda(E^1)+QE^2-F)'\|^2+(1+L_2h_t)\|(\Lambda(E^1)+QE^2-F)''\|^2+$$
$$+L_3(\|(\hat{F}+F)'\|^2+h_t\|F_t'\|^2)+L_4(\|(\hat{F}+F)''\|^2+h_t\|F_t''\|^2),\tag{3.9}$$

где $L_i$, $i=1,\ \dots,\ 4$,— ограниченные константы, не зависящие от $h_t$, $h_x$.

С учетом свойств матриц $A$ и $Q$ легко проверить, что $\Phi(E)>0$. Из (3.9) поэтому следует оценка (3.5) для $i=2$.

Умножим (3.1) скалярно на $\hat{E}^1$. Получим:

$$\|(\hat{E}^1)'\|^2+\|(\hat{E}^1)''\|^2\leqslant(1+P_1h_t)\|(E^1)'\|^2+(1+P_2h_t)\|(E^1)''\|^2+$$
$$+P_3h_t\|(\tilde{\Lambda}(\hat{E}^1)+QE^2-\hat{F})'\|^2+P_4h_t\|(\tilde{\Lambda}(\hat{E}^1)+QE^2-\hat{F})''\|^2,$$

где $P_i$, $i=1,\ \dots,\ 4$,— ограниченные константы, не зависящие от $h_t$, $h_x$. Если аккуратно рассмотреть слагаемые с $\Lambda(\hat{E}^1)+QE^2-\hat{F}$ и продолжить полученную оценку рекуррентно вправо, то (3.5) окажется справедливым для переменных $E^1$, $E^1_\tau$. Теорема доказана.

**4. Доказательство сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной.** Для простоты записи опустим знаки векторов в уравнении (1.4). Задача для погрешности метода имеет вид:

$$z^1_{vt}+U\hat{z}^1_{v\bar{x}}+Sz^2_v+\psi^1_4=0,\tag{4.1}$$

$$z^2_{vt}+U\hat{z}^1_{v\bar{x}}+S\hat{z}^2_v+\psi^2_4=0,\tag{4.2}$$

$$z^1_{nt}+U\hat{z}^1_{n\bar{x}}+Sz^2_n+\hat{\psi}^1_3=0,\tag{4.3}$$

$$z^2_{nt}+U\hat{z}^1_{n\bar{x}}+S\hat{z}^2_n+\hat{\psi}^2_3=0,\tag{4.4}$$

$$z^1_{Et} + \tilde{\Lambda}(\hat{z}^1_E) + Sz^2_E + \hat{\psi}^1_1 = 0, \tag{4.5}$$

$$z^2_{Et} + \Lambda(\hat{z}^1_E) + S\hat{z}^2_E + \hat{\psi}^2_1 = 0; \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} z^i_\alpha(x,\ 0) = 0, \quad i = 1,\ 2, \quad \alpha = v,\ n,\ E, \quad 0 \leqslant x \leqslant L; \\ z^i_\alpha(0,\ t) = 0, \quad i = 1,\ 2, \quad \alpha = v,\ n, \quad 0 < t \leqslant T; \\ z^i_{E_1}(0,\ t) = E(0,\ t) - E^i(0,\ t) = 0, \quad i = 1,\ 2, \quad 0 < t \leqslant T; \\ z^i_{E_2}(L,\ t) = E_\tau(L,\ t) - E^i_\tau(L,\ t) = 0, \quad i = 1,\ 2, \quad 0 < t \leqslant T; \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $z_v = v - v^i$, $z^i_n = n - n^i$, $z_E = \begin{pmatrix} E & -E^i_i \\ E_\tau & -E^i_\tau \end{pmatrix}$, $i = 1,\ 2$; $\psi^i_j$ — погрешности аппроксимации от замены дифференциальной задачи разностной, $\psi^i_j = O(h_t + h_x)$, $j = 1,\ 3,\ 4$.

Теорема 2. *Пусть задача (1.1)—(1.5) имеет единственное решение. Тогда при $h_t$, $h_x \to 0$ решение разностной задачи (2.1)—(2.9) сходится к решению исходной дифференциальной задачи и для погрешности метода справедливы оценки*

$$\|(z^i_\alpha)'\|^2 + \|(z^i_\alpha)''\|^2 \leqslant O(h^2_t + h^2_x), \quad \alpha = v,\ n,\ E,\ i = 1,\ 2. \tag{4.8}$$

Доказательство. (4.3) перепишем следующим образом:

$$\hat{z}^1_n = h_x/(h_x + h_tU)(z^1_n + h_tU/h_x\hat{z}^1_{n(-1)} - h_tSz^2_n + h_t\hat{\psi}^1_3), \tag{4.9}$$

Умножим скалярно (4.9) на $\hat{z}^1_n$. Приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \|(\hat{z}^1_n)'\|^2 + \|(\hat{z}^1_n)''\|^2 \leqslant{}& 2h^2_x/(h_x + h_tU)^2\{\|(z^1_n)'\|^2 + \|(z^1_n)''\|^2 + \\ &+ h^2_tU^2(\|(z^1_{n(-1)})'\|^2 + \|(z^1_{n(-1)})''\|^2) + h^2_t(\|(Sz^2_n)'\|^2 + \\ &+ \|(Sz^2_n)''\|^2) + h^2_t(\|(\hat{\psi}^1_3)'\|^2 + \|(\hat{\psi}^1_3)''\|^2)\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Скалярно умножив (4.4) на $\hat{z}^2_n$, аналогично получим:

$$\begin{aligned} \|(\hat{z}^2_n)'\|^2 + \|(\hat{z}^2_n)''\|^2 \leqslant{}& 2\{\|(z^2_n)'\|^2 + \|(z^2_n)''\|^2 + h^2_tU^2(\|(\hat{z}^1_{n\bar{x}})'\|^2 + \\ &+ \|(\hat{z}^1_{n\bar{x}})''\|^2) + h^2_t(\|(\hat{\psi}^2_3)'\|^2 + \|(\hat{\psi}^2_3)''\|^2)\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Учитывая начальные и граничные условия, величины $\hat{\psi}^{1,2}_3$, методом математической индукции легко получаются оценки (4.8) для $\alpha = n$.

Таким же образом проводится доказательство и для $\alpha = v$, $E$. Теорема доказана.

На основе численного решения задачи (1.1)—(1.5) были исследованы основные параметры нелинейной стадии развития черенковской неустойчивости РЭП в монокристалле кремния, в частности абсолютной черенковской неустойчивости [1]. В процессе моделирования изучались режим конвективной неустойчивости, порог возникновения абсолютной неустойчивости и нелинейная стадия ее развития. Оказалось, что режим конвективной неустойчивости при любых значениях параметров удовлетворительно описывается известным линейным решением [3], в то время как режим абсолютной неустойчивости системы «электромагнитная волна+РЭП+кристалл» существенно нелинеен. На основе полученных результатов можно говорить о квазиавтомодельности нелинейного решения в случае развития абсолютной черенковской неустойчивости.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Н. Абрашину за помощь в работе.

## Summary

The difference scheme of numerical solution of a system of nonlinear differentio equations describing the relativistic electron beam Čerenkov instability in monocrys for Roentgen wavelength range is proposed.



## Литература

1. Абрашин В. Н., Грубич А. О., Сытова С. Н. // Математическое мо лирование. 1991. № 8. С. 21—29.
2. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я., Феранчук И. Д. // Ве АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 1. С. 92—97.
3. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я., Батраков К. Г. // Ве АН БССР. Сер. фіз.-энерг. навук. 1991. № 1. С. 53—61.
4. Абрашин В. Н. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 31- 323.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.



*Поступила в редакц*
*19.09.91*



*НИИ ядерных проблем*
*при БГУ*


Преобраз
Имея в ви

$\Pi_m$

получаем

$= \Big\|\sum_{\nu=1}^{m}$

т. е. получ
этой цепоч
Доказател

The noti
of Ehler for
equations of
mensional po


1. Муха
133.
2. Муха
3. Муха
4. Соко
5. Гайш
ния. Минск, 1


*Минский ради*
*инст*

*УДК 519.63:53*

В [1] пр
нелинейной
стского элек
диапазоне д
устойчивост
следована д
исследовала
ровании экс
РЭП в крист
В настоя
мы нелинейн
рующей ука